සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය
Royal College Royal College Royal College Royal College Royal College Royal College Royal
රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)

General Certificate of Education (Adv.Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

10	S	I

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) i. $p,q,r \in \mathbb{R}^{+}$ හා $0 < p < 2$ යැයි ගනිමු. $|p-2|, q, r$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටයි නම් $|p-2|x^2 + 2qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික හා සමපාත බව පෙන්වන්න. තවද ~~$0 > q^2 > 2r$~~ $q^2 < 2r$ බව පෙන්වන්න.

ii. $x^2 - 2cx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ. මෙහි $c \neq 1$ වේ. $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta-1}$ හා $\dfrac{\beta^2+1}{\alpha-1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $g(x)=0$ නම්, $g(x)=(c-1)x^2+4(c-1)x+c^2-2c+5$ බව පෙන්වන්න. $y=g(x)$ වක්‍රය $x=-2$ රේඛාව වටා සමමිතික බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $f(x)=x^3-ax^2-2b$ හා $g(x)=x^4-ax^3+5bx^2-c$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a,b,c \in \mathbb{R}$. $(x+1)$ යන්න $f(x)$ හා $g(x)$ හි පොදු සාධකයක් නම් $a=-(1+2b)=\dfrac{-3-2c}{3}$ බව පෙන්වන්න.
$h(x)=-x^4+ax^3+4x^2+5cx-2$ නම් $c=3$ විට $g(x)+h(x) \geq \dfrac{-45}{4}$ බව පෙන්වන්න.

12(a) කඳු මුදුනක සිටින සංඥාකරුවෙක් ඈත තිබෙන නගරකට පණිවිඩ යැවීම තිරසට සවිකරණ ලද දණ්ඩක විවිධ පාටින් යුතු කොඩි එල්ලීම මගින් පණිවිඩ හුවමාරු කරයි. කොඩි සකස්කර ඇති පිළිවෙල අනුව පණිවිඩය හඳුනා ගනී.

සංඥාකරුවා සතුව කොල පැහැති කොඩි 4 ක්, රතු පැහැති කොඩි 3 ක්, සුදු පැහැති කොඩි 1ක් හා නිල් පැහැති කොඩි 2 ක් වේ. කොඩි සියල්ල පාටින් හැර අනෙක් ලක්ෂණ වලින් සර්වසම වේ. සංඥාකරුවාට යැවිය හැකි පණිවිඩ ගණන පහත අවස්ථාවලදී සොයන්න.

i. කොඩි සියල්ලම භාවිතා කරමින්

ii. විශේෂ පණිවිඩයක් සඳහා කොල පැහැති කොඩි භාවිතා කල නොහැකි නම් හා ඉතිරි කොඩි වලින් කොඩි 5ක් පමණක් භාවිතා කරමින් එම විශේෂ පණ්විඩය යැවිය යුතු නම්, යැවිය හැකි පණිවිඩ ගණන සොයන්න.

23' AL API [PAPERS GROUP]

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{4(2r+3)}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ යැයි ගනිමු. තවද $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{A}{(r+1)} + \dfrac{B}{(r+2)}$ යැයි ගනිමු. මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. මෙම A හා B සඳහා $f(r)$ ලියා දක්වන්න. **එනයින්,** $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=n}^{2n} U_r = \dfrac{8n^2+19n+12}{(n+1)(n+2)(2n+3)}$ බව පෙන්වන්න. තවද $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි අගය සොයන්න.

13.(a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} b & b-2 \\ b-2 & b-3 \end{pmatrix}$ යනු $AB^T = C$ වන පරිදි වූ න්‍යාස 3 කි. $(a, b \in \mathbb{R})$. $a=3$ හා $b=5$ බව පෙන්වන්න. C^{-1} ලියා දක්වා $C + C^{-1} = 7I$ බවද තවදුරටත් පෙන්වන්න. මෙහි I යනු ගණය 2×2 වූ ඒකක න්‍යාසයකි. තවද $P \equiv \frac{1}{3}(C-2I)$ යැයි ගනිමු. $C(Q+P) + AA^T = C + C^{-1}$ වන පරිදි Q න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $z + z^2 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, i. $Arg(z+z^2)$ හා

ii. $|z+z^2|$ ලියා දක්වන්න.

ආගන්ඩ සටහනක A, B හා C ලක්ෂ්‍ය මගින් පිළිවෙලින් z, z^2 හා $z+z^2$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය වේ. ආගන්ඩ තලය මත A, B, C නිරූපණය කොට $OABC$ රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න. (O යනු මූලය වේ.) $\theta = \frac{\pi}{6}$ විට $z + z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)(1+i)$ බව පෙන්වන්න. **එනයින්,** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; (මෙහි $r \in \mathbb{R}$) යැයි ගනිමු. තවද $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $z^n + \bar{z}^n = 2r^n \cos n\alpha$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $n \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එනයින්, $(1+i)^n + (1-i)^n = [illegible] \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ බවද පෙන්වන්න. $2\sqrt{2}^n$

14.(a) $x \neq b$ සඳහා, $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{(x-b)^3}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වන පරිදි වූ නියත වේ. $x = 3$ හිදී $f(x)$ ශ්‍රිතයට හැරුම් ලක්ෂයක් ඇත්නම් හා $x = 0$ දී $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් ඇති බව දී ඇත්නම් a හා b නියතවල අගයන් සොයන්න. $f''(x) = \dfrac{2(x^2-18)}{x^5}$ බව තවදුරටත් දී ඇත්නම්, අක්ෂමත අන්තඃඛණ්ඩ, ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ හා නතිවර්තන ලක්ෂ දක්වමින් $y = f(x)$ හි වක්‍රය අනුරේඛනය කරන්න.

23' AL API [PAPERS GROUP]

(b) තවදුරටත් $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ හි හැරුම් ලක්ෂ, ස්පර්ශෝන්මුඛ, අන්තඃඛණ්ඩ අපෝහනය කරමින් $g(x)$ හි වක්‍රය අනුරේඛනය කරන්න.

(c) ජල කරාමයකින් තත්පරයකට $3\,cm^3$ ක නියත සීඝ්‍රතාවයකින් සමතල මතුපිටට ජලය පිටවී $\dfrac{1}{27}cm$ ක ගැඹුරක් ඇති වෘත්තාකාර වතුර වලක් සෑදේ. වතුර වලේ වර්ගඵලය වැඩිවන සීඝ්‍රතාවද එම වෘත්තයේ අරය $10cm$ වන විට අරය වැඩිවන සීඝ්‍රතාවයද සොයන්න.

15(a) $\tan^{-1}x$ සඳහා සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\frac{\pi^2}{32}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $1-\cos^2 x\equiv\lambda\left(9-16\cos^2 x\right)+\mu$ වන පරිදි λ හා μ නියත සොයන්න. එනයින්, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{3+4\cos x}dx$ අගයන්න.

23' AL API [PAPERS GRO

(c) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x^2\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $I=-\pi^2+2J$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$ වේ. $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ යන සම්බන්ධය භාවිතයෙන් J හි අගය ගණනය කර, $I=\pi(2-\pi)$ බව පෙන්වන්න.

16.a. අචල (α,β) ලක්ෂ්‍යයක් හරහා සෑම විටම ගමන් කරන රේඛාවක් මතට මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට අඳින ලද ලම්බයේ අඩියේ පථය සොයන්න.

(b)i. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව ලබාගන්න.

ii. $S\equiv 2a(y-7x)y+2by(4y-4x+3)+(4y-4x+3)(2y-14x)=0$ සමීකරණය මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය කිරීම සඳහා වන a හා b හි අගයන් සොයන්න.

iii. එනයින්, a හා b හි එම අගයන් සඳහා මෙම සමීකරණය මගින් $y=0, y=x-\dfrac{3}{4}$ හා $y=7x$ සමීකරණ වලින් OA, AB හා BO පාද ලබාදෙනු ලබන OAB ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිරූපණය වන බව පෙන්වන්න. තවද S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන හා මූල ලක්ෂ්‍යය හා $(0,1)$ යන ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

17. (a) $\sin A$ ඇසුරෙන්, $\sin 3A$ ලියා දක්වන්න. **එනයින්,** $\cos 3A \equiv 4\cos^3 A - 3\cos A$ බව **අපෝහනය** කරන්න. දැන් $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $T(x) \equiv \sqrt{2}(\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x) + 1$ යැයි ගනිමු. $T(x)$ යන්න, $T(x) \equiv \alpha + \beta\cos(3x - \theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි α, β හා $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියත වෙයි. **එනයින්,** $x \in \left[-\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$ වසම තුල $y = T(x)$ වක්‍රය ප්‍රස්තාර ගත කරන්න.

තවද $y = T(x)$ වක්‍රය ඒකක $\frac{\pi}{4}$ ක් **දකුණට** ද ඒකක 3 ක් **ඉහළටද** උත්තරණය කළ විට ලැබෙන නව ශ්‍රිතය $U(x)$ ලියා දක්වන්න.

(b) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, sin නීතිය හා cos නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. තවද sin නීතිය ඇසුරෙන් cos නීතිය **අපෝහනය** කරන්න. දැන් ABC ත්‍රිකෝණයක $(BC < AC < AB)$ පාද පිළිවෙලින් සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන්නේ යැයි ගනිමු. මෙම ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණය මෙන් **දෙගුණයක් නම්,** $\cos A = \frac{a+2d}{2a}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි d යනු ඉහත සමාන්තර ශ්‍රේණියේ පොදු අන්තරය වේ.

cos නීතිය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ පාදවල දිග a ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. තවදුරටත් ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය, $\tan^{-1}(\sqrt{7}\lambda)$ වන පරිදි λ **නිඛිලය** අපෝහනය කරන්න.

(c) $-1 \le x \le +1$ සඳහා, $\sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1-4^x}{1+4^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1-4^x}\right) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

23' AL API [PAPERS GROUP]

23, AL API

PAPERS GROUP

The best group in the telegram